Aufgabe:

a) Zeige, dass P, Q und g in einer Ebene liegen.
b) Beweise, dass P und Q auf verschiedenen Seiten von g liegen

Es werden zwei Lösungswege gezeigt.

Dazu gibt es jeweils zwei Zahlenbeispiele.

Text Nr. 63130

Stand 10. Dezember 2020

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

1. Aufgabe

Gegeben sind die Punkte $P(2|3|3)$ und $Q(-1|4|4)$, sowie die Gerade $\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{\vec{a}}+r\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}}$

a) Zeige, dass P, Q und g in einer Ebene E liegen.
(Diese Situation ist notwendig, sonst ist die Aufgabe im Raum b) sinnlos.)

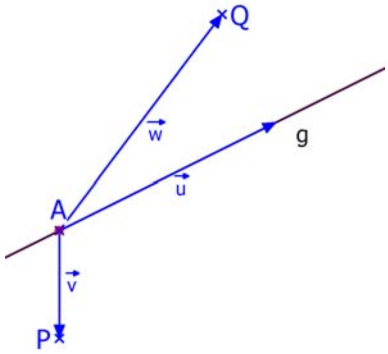
b) Zeige, dass P und Q auf verschiedenen Seiten von g liegen.

a) $A(1|2|3)$ ist der Aufpunkt von g.

Wenn die Vektoren $\vec{v}=\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{w}=\overrightarrow{AQ}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

komplanar (linear abhängig) sind,

dann liegen P, Q und g in einer Ebene.



1. Lösung mit einer Determinante (Regel von Sarrus):

$$D=\left|\vec{u}\quad\vec{v}\quad\vec{w}\right|=\left|\begin{array}{ccc|cc}-1&1&-2&-1&1\\3&1&2&3&1\\1&0&1&1&0\end{array}\right.=-1+2+0-(-2+0+3)=1-1=0$$

Also sind diese drei Vektoren linear abhängig, also komplanar.

Folglich liegen P, Q und g in einer Ebene.

2. Lösung mittels eines Gleichungssystems:

$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig, wenn z.B. gilt: $\vec{u}=r\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}$

d. h. $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}r-2s=-1\\r+2s=3\\s=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$

Aus (3) folgt bereits $s = 1$.

Aus (1) erhält man dann $r=2s-1=2-1=1$

Entscheidend ist nun die Probe in der übrig gebliebenen Gleichung (2):

$1+2=3$ ist eine wahre Aussage.

Also sind diese drei Vektoren linear abhängig, also komplanar.

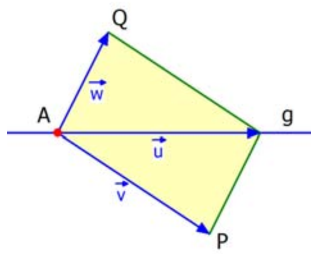
Folglich liegen P, Q und g in einer Ebene.

b) **1. Lösungsmethode:**

Um herauszufinden, wo P „wirklich“ liegt, wähle ich $\vec{v}$ und $\vec{w}$ als Basis für die Ebene. Dann stelle ich den Vektor $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.

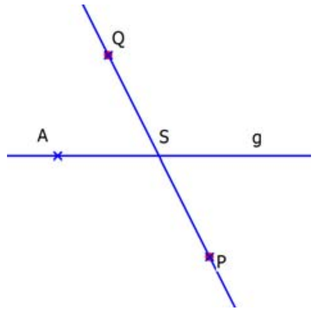
Dies wurde bereits zuvor ermittelt: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

Eine geeignete Skizze wäre also diese:



Damit ist klar, dass P und Q auf verschiedenen Seiten von g liegen.

2. Lösungsmethode:



Ich schneide die Gerade PQ mit g und berechne den Schnittpunkt S.

Daraus ergibt sich die Antwort nach der Lage.

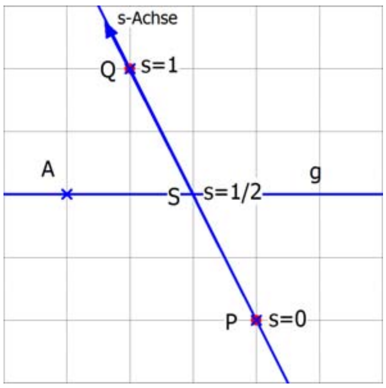
(PQ): $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$, g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}_{\vec{a}} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}_{\vec{u}}$

Schnittgleichung: $\left\{\begin{matrix} 2-3s = 1-r \\ 3+s = 2+3r \\ 3+s = 3+r \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$

(2) – (3): $0 = -1 + 2r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}$

Aus (3): $s = r = \frac{1}{2}$

Probe in (1): $2 - 3\cdot\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ wahre Aussage.



Wir haben durch die Geradengleichung für PQ auf dieser Geraden eine s-Achse „installiert“, denn jeder Punkt der Geraden ist durch einen s-Werte (das ist dann die Punkt-Koordinate) festgelegt.

Zu P gehört s = 0, zu Q gehört s = 1 und laut Rechnung gehört zu S $s = \frac{1}{2}$, was nebenbei besagt, dass S der Mittelpunkt von P und Q ist.

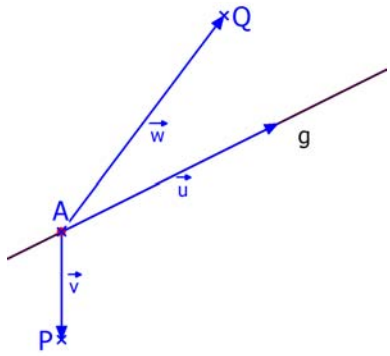
Entscheidend ist nur, dass der s-Wert vom Schnittpunkt S zwischen denen von P und Q liegt. Also liegt auch S zwischen PO und Q, also auf verschiedenen Seiten von g.

2. Aufgabe

Gegeben sind die Punkte $P(8\,|\,2\,|\,3)$ und $Q(1\,|\,9\,|\,2)$, sowie die Gerade $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$

a) Zeige, dass P, Q und g in einer Ebene E liegen.
(Diese Situation ist notwendig, sonst ist die Aufgabe im Raum b) sinnlos.)

b) Zeige, dass P und Q auf verschiedenen Seiten von g liegen.



a) $A(4\,|\,0\,|\,-1)$ ist der Aufpunkt von g.

Wenn die Vektoren $\vec{v} = \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

komplanar (linear abhängig) sind, dann liegen P, Q und g in einer Ebene.

<u>1. Lösung mit einer Determinante</u> (Regel von Sarrus):

$$D = \left| \vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w} \right| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \\ -5 & 2 & 9 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \end{array} \right. = 24 + 0 + 60 - 0 - 144 + 60 = 0$$

Also sind diese drei Vektoren linear abhängig, also komplanar.
Folglich liegen P, Q und g in einer Ebene.

<u>2. Lösung mittels eines Gleichungssystems:</u>

$\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig, wenn z.B. gilt: $\vec{u} = r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$

d. h. $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4r - 3s = 4 \\ 2r + 9s = -5 \\ 4r + 3s = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

(1) + (3): $8r = 4 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

(3) - (1): $6s = -4 \Rightarrow s = -\frac{2}{3}$

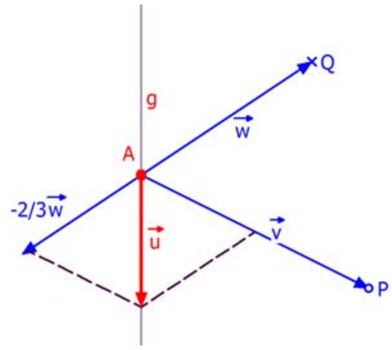
Entscheidend ist nun die Probe in der übrig gebliebenen Gleichung (2):

$2 \cdot \frac{1}{2} - 9 \cdot \frac{2}{3} = 1 - 6 = -5$ ist eine wahre Aussage.

Ergebnis: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}$

Also sind diese drei Vektoren linear abhängig, also komplanar.
Folglich liegen P, Q und g in einer Ebene.

b) **1. Lösungsmethode:**



Um herauszufinden, wo P „wirklich“ liegt, wähle ich $\vec{v}$ und $\vec{w}$ als Basis für die Ebene. Dann stelle ich den Vektor $\vec{u}$ als Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.

Dies wurde bereits zuvor ermittelt: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}$

Eine geeignete Skizze wäre also diese:

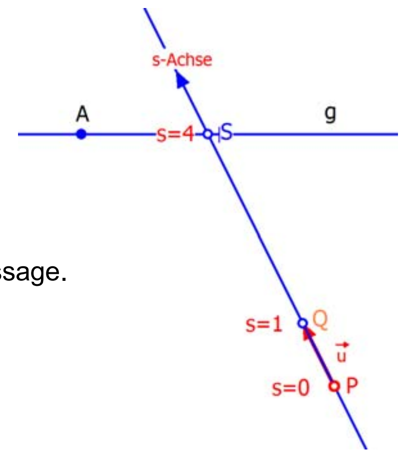
Damit ist klar, dass P und Q auf der gleichen Seite von g liegen.

2. Lösungsmethode:

Ich schneide die Gerade PQ mit g und berechne den Schnittpunkt S.

Daraus ergibt sich die Antwort nach der Lage.

(PQ): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, g: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$



Schnittgleichung: $\left\{\begin{array}{r} 8+7s = 4+4r \\ 2+7s = -5r \\ 3-s = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Aus (3): $s = 4$

In (2): $2+28 = -5r \Rightarrow -5r = 30 \Leftrightarrow r = -6$

Probe in (1): $8-28 = 4-24 \Leftrightarrow -20 = -20$ wahre Aussage.

Wir haben durch die Geradengleichung für PQ auf dieser Geraden eine s-Achse „installiert“, denn jeder Punkt der Geraden ist durch einen s-Werte (das ist dann die Punkt-Koordinate) festgelegt.

Zu P gehört s = 0, zu Q gehört s = 1 und laut Rechnung gehört zu S $s = 4$. Daraus folgt, dass S außerhalb der Strecke PQ liegt.

Also liegen P und Q auf der gleichen Seite von g.

3. Lösungsmethode:

Man berechnet den Schnittpunkt $S(-20\,|\,30\,|\,-1)$.

Dann vergleicht man $\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 28 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

und erhält $\overrightarrow{PS} = 4 \cdot \overrightarrow{PQ}$.

Also liegt Q zwischen P und S. Also liegen P und Q auf der gleichen Seite von g.